



اول دامنه تعریف تابع را پیدا می‌کنیم. داریم:

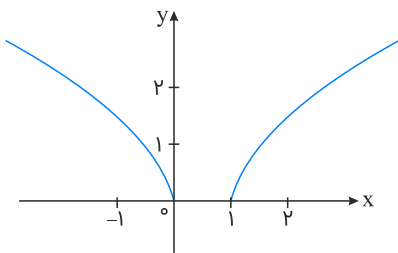
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

تابع در $x = 0$ و $x = 1$ نقطه بحرانی دارد، چراکه نقاط ابتدا و انتهای بازه، جزء نقاط بحرانی تابع محسوب می‌شوند. حالا مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا بررسی کنیم که آیا تابع نقطه بحرانی دیگری دارد یا نه. داریم:

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

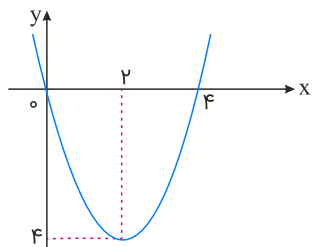
$x = \frac{1}{2}$ در دامنه تابع نیست، پس نمی‌تواند نقطه بحرانی باشد.
برای فهم بیشتر نمودار تابع f را برایتان رسم کرده‌ایم.



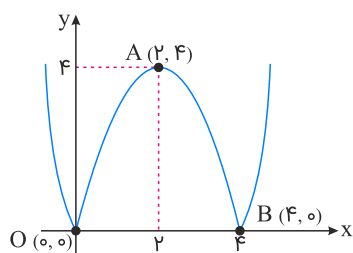
ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4x)^2} = |x^2 - 4x| = |x(x - 4)|$$

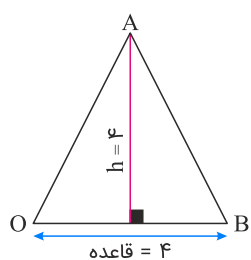
تابع $y = x(x - 4)$ یک سهمی با دهانه رو به بالا و ریشه‌های ۰ و ۴ است.



حالا قدر مطلق به تابع اثر می‌کند و قسمت‌های پایین محور x ‌ها، نسبت به آن قرینه می‌شوند:



باتوجه به شکل، تابع f در نقاط O و B ، مشتق ندارد و در نقطه A ، مشتقش صفر است، پس هر ۳ نقطه، بحرانی هستند. مساحت مثلث OAB را حساب می‌کنیم:



$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

برای تعیین بازه‌ای که در آن تابع $y = \frac{1}{f(x) - 1}$ اکیداً نزولی باشد، مشتق تابع را مشخص کرده و منفی قرار می‌دهیم. داریم:

$$y' = \frac{0 - f'(x)}{(f(x) - 1)^2} = \frac{-f'(x)}{(f(x) - 1)^2} \leq 0$$

باتوجه به اینکه $(f(x) - 1)^2$ همواره مثبت می‌باشد، بنابراین بایستی $f'(x) \geq 0$ باشد. (یعنی بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً صعودی باشد).

به ظاهر طول بیشترین بازه از تابع f با این خاصیت، بازه $(1, 6)$ می‌باشد. دقت کنیم که $x = 4$ ریشهٔ مخرج تابع $y = \frac{1}{f(x) - 1}$ می‌باشد و این نقطه، نقطهٔ ناپیوستگی تابع است. پس بایستی بازه $(1, 6)$ را در $x = 4$ تفکیک کرده و ادعا کنیم تابع در بازه‌های $(1, 4)$ و $(4, 6)$ اکیداً نزولی می‌باشد که حداکثر طول بازه $3 = 4 - 1$ خواهد بود.

$$y' = 6mx^2 - 6mx - 6 = 6(mx^2 - mx - 1)$$

یک تابع پیوسته هنگامی اکیداً یکنوا است که علامت مشتق در آن تغییر نکند. باتوجه به اینکه تابع اکیداً صعودی می‌باشد، باید مشتق تابع که در اینجا یک تابع درجهٔ دوم است تغییر علامت ندهد. یعنی $\Delta \leq 0$ باشد. درنتیجه داریم:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 + 4m \leq 0 \Rightarrow -4 \leq m \leq 0 & (1) \\ m > 0 & (2) \end{cases}$$

$\xrightarrow{(1) \cap (2)}$ جواب ندارد

ابتدا با تفکیک حدود در ریشه‌های داخل قدر مطلق، تابع f را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 3)x + 4 & ; x \leq 0 \\ x - (2x - 1) + ax + 3 = (a - 1)x + 4 & ; 0 < x < \frac{1}{2} \\ x + (2x - 1) + ax + 3 = (a + 3)x + 2 & ; x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال دقت کنیم که تنها امکان برای وجود بی‌شمار نقطه بحرانی در این تابع، ثابت بودن تابع در یکی از زیربازه‌های موجود می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \\ \text{یا} \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ \text{یا} \\ a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

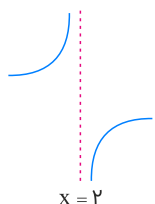
پس حاصل جمع مقادیر ممکن برای a برابر است با: $(3) + (1) + (-3) = 1$

باتوجه به اینکه $f'(x) = 2x^{\wedge} + x^f + 1$ عبارتی همواره مثبت می باشد، بنابراین تابع f اکیداً صعودی می باشد. از طرفی می دانیم $f(2) = 0$ ، پس باتوجه به صعودی بودن تابع f ، در همسایگی راست $x = 2$ تابع f از مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می شود و در همسایگی چپ آن از مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می شود.

حال برای بررسی نمودار تابع $y = \frac{1-x}{f(x)}$ در اطراف $x = 2$ ، باید حد چپ و حد راست این تابع را در $x = 2$ مشخص کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{f(x)} = \frac{1-2}{f(2^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{f(x)} = \frac{1-2}{f(2^-)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow$$



تابع $f(x)$ در -1 ، $x = 1$ مشتق ناپذیر است، چرا که این نقاط ریشه های درجه یک عبارت داخل قدر مطلق هستند. $x = 0$ نیز ریشه درجه یک عبارت داخل قدر مطلق است ولی خارج از قدر مطلق عامل صفرکننده $\sqrt[3]{x}$ باعث صفرشدن مشتق در این نقطه می شود و تابع در $x = 0$ نقطه بحرانی دارد ولی مشتق پذیر است. دقت کنید که این تابع نقاط بحرانی دیگری نیز دارد ولی تنها نقاط مشتق ناپذیری آن $x = \pm 1$ است.

نکته تستری:

۱) تابع f در بازه‌ای صعودی است که $f' \geq 0$ بوده و در بازه‌ای نزولی است که $f' \leq 0$ باشد.

۲) در توابع کسری اگر مشتق تابعی را بزرگ‌تر از صفر یا کوچک‌تر از صفر قرار دهیم تا پی ببریم تابع در چه بازه‌ای صعودی یا نزولی است ولی بازه به‌دست‌آمده شامل ریشهٔ مخرج (مجانِب قائم) باشد، باید این بازه را در ریشهٔ مخرج تفکیک حدود کنیم.

برای آنکه پی ببریم تابع $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است، کافی است ابتدا مشتق تابع را محاسبه کرده و کوچک‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

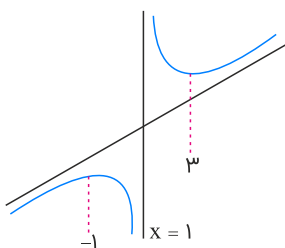
$$y' = \frac{(2x + 3)(x - 1) - 1(x^2 + 3x)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{\underbrace{(x - 1)^2}_{\text{همواره نامنفی}}} < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

چون بازهٔ به‌دست‌آمده شامل ریشهٔ مخرج یا همان مجانِب قائم، یعنی $x = 1$ است، پس این بازه را در $x = 1$

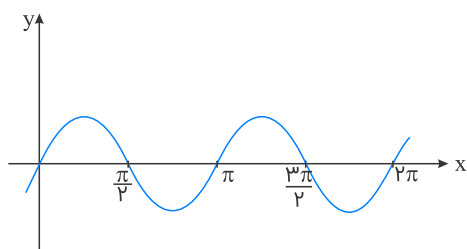
تفکیک حدود می‌کنیم. بنابراین تابع $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$ در بازهٔ $(-1, 1)$ و $(1, 3)$ اکیداً نزولی بوده و داریم:

$$\begin{cases} (a, b) = (-1, 1) \Rightarrow b - a = 2 \\ (a, b) = (1, 3) \Rightarrow b - a = 2 \end{cases}$$



$$f'(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

نمودار $f'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ را رسم می‌کنیم:



جایی که $f'(x)$ مثبت باشد، تابع $f(x)$ صعودی است. مطابق شکل روی بازه $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ مثبت می‌باشد.

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	+	-	-	+	
y	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

مشاهده کنید که تابع در $(0, 1)$ و $(1, 2)$ نزولی است ولی در $(2, +\infty)$ نه صعودی و نه نزولی است. بنابراین طول بزرگ‌ترین بازه برابر با ۱ می‌باشد.

برای آنکه پی ببریم تابع f در چه بازه‌ای صعودی است، باید مشتق تابع را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$f'(x) = (3x^2 - 40)\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^3 - 40x) = \frac{(3x^2 - 40)(3x) + x^3 - 40x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{10x^3 - 160x}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0 \Rightarrow 10x^3 - 160x > 0 \Rightarrow 10x(x^2 - 16) > 0$$

همواره نامنفی

حال برای حل نامعادله فوق، جدول تعیین علامت آن را رسم می‌کنیم. داریم:

x	سادۀ -۴	سادۀ ۰	سادۀ ۴	
f'	-	۰	+	-
f	↘	↗	↘	↗

پس تابع f در بازه‌های $(-4, 0)$ یا $(4, +\infty)$ اکیداً صعودی است. در بین گزینه‌ها فقط بازه $(-3, -1)$ زیرمجموعه بازه‌هایی است که تابع f در آن اکیداً صعودی می‌باشد.

نکته تستری: برای تعیین طول نقاط بحرانی توابعی که ضابطه مشتق آن‌ها مشخص است (به عبارتی شامل قدر مطلق یا جزء صحیح نباشند)، از ضابطه تابع مشتق گرفته و همه ریشه‌های صورت مشتق را مشروط بر اینکه متعلق به دامنه تعریف تابع باشند، به عنوان طول نقطه بحرانی معرفی می‌کنیم. در توابع شامل رادیکال با فرجه فرد، علاوه بر ریشه‌های صورت، ریشه‌های مخرج را نیز مشخص می‌کنیم.

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 28x^{\frac{1}{3}} = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

باتوجه به توضیحات بالا، داریم:

$$f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x} = 2x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28) = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اکسترم نسبی} \Rightarrow \text{سادۀ} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ \text{عطف قائم} \Rightarrow \text{مضاعف} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

پس تابع f دارای ۳ نقطه بحرانی است.

نکته تستری: در توابع شامل رادیکال با فرجه زوج، اولین گام تعیین دامنه تعریف تابع است. دامنه تعریف تابع f ، برابر $\mathbb{R}$ است. برای بررسی یکنوایی تابع f ، باید از ضابطه تابع مشتق گرفته و جدول تغییرات تابع را رسم کنیم. داریم:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{\overbrace{2x - 2}^{y(x-1)}}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

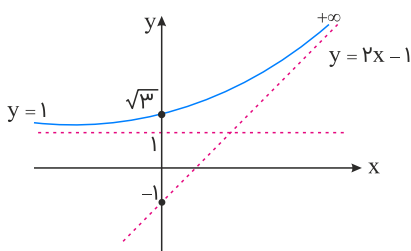
با کمی دقت به راحتی پی می‌بریم که مخرج ریشه حقیقی ندارد (چون دلتای عبارت زیر رادیکال، یعنی عبارت $x^2 - 2x + 3$ منفی است). بنابراین مخرج کسر مشتق همواره مثبت است. حال به بررسی وجود ریشه‌های صورت کسر مشتق می‌پردازیم. داریم:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} + x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 3} = 1 - x \xrightarrow{1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1} x^2 - 2x + 3 = (1-x)^2 \\ \Rightarrow \cancel{x^2} - \cancel{2x} + 3 = \cancel{x^2} - \cancel{2x} + 1 \Rightarrow 3 = 1 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

چون صورت کسر مشتق ریشه حقیقی ندارد، پس یا همواره مثبت است و یا همواره منفی. با کمی دقت یا جایگذاری عدد دلخواهی به راحتی پی می‌بریم صورت کسر مشتق نیز همواره مثبت می‌باشد. باتوجه به این توضیحات صورت و مخرج مشتق همواره مثبت بوده و در نتیجه مشتق تابع f ، همواره مثبت می‌باشد. بنابراین نمودار تابع f ، همواره اکیداً صعودی خواهد بود. روش دوم: باتوجه به اینکه دامنه تعریف تابع f برابر $\mathbb{R}$ است، پس کافی است رفتار تابع را در بی‌نهایت دور بررسی نماییم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x^2 - 2x + 3}) \xrightarrow{\text{هم‌ارزی برنولی}} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + |x - 1|) \\ \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} y = 2x - 1 \\ \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} y = 1 \end{cases}$$

پس نمودار f به صورت زیر خواهد بود:



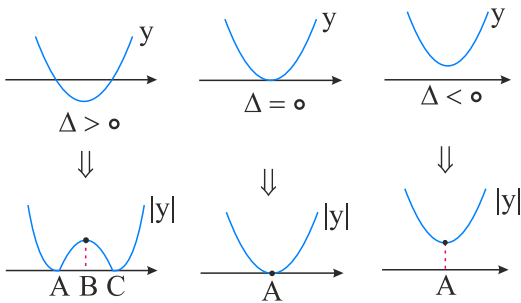
$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax+b}{2x+1} & ; x \geq 0 \\ \frac{ax+b}{-2x+1} & ; x < 0 \end{cases}$$

مشتق تابع باید همواره منفی باشد تا تابع اکیداً نزولی باشد؛ پس از تابع $f(x)$ مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a-2b}{(2x+1)^2} < 0 \Rightarrow -2b < -a \Rightarrow 2b > a & ; x \geq 0 \\ \frac{a+2b}{(-2x+1)^2} < 0 \Rightarrow 2b < -a & ; x < 0 \end{cases}$$

پس $2b > a$ یا $2b < -a$ است.

اگر $y = ax^2 + bx + c$ باشد، در شکل‌های زیر، حالات مختلف نمودار y و $|y|$ رسم شده‌اند. ببینید: (دقت کنید که شکل‌ها با فرض $a > 0$ کشیده شده‌اند)



همان‌طور که می‌بینید، نمودار $|y|$:

۱) در حالت $\Delta > 0$ ، دارای سه نقطهٔ بحرانی است که عرض دو تای آن‌ها (A, C) برابر صفر و عرض یک نقطه (B) غیرصفر است.

۲) در حالت $\Delta = 0$ ، فقط دارای یک نقطهٔ بحرانی (A) با عرض صفر است.

۳) در حالت $\Delta < 0$ ، فقط دارای یک نقطهٔ بحرانی (A) با عرض غیرصفر است.

پس برای آنکه نقطهٔ بحرانی با عرض غیرصفر داشته باشیم، حالات $\Delta > 0$ و $\Delta < 0$ قابل قبول بوده و فقط حالت $\Delta = 0$ نباید اتفاق بیفتد:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(a^2) = 0 \Rightarrow 1 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

پس $a = \pm \frac{1}{2}$ ، مقادیر غیرقابل قبول برای a هستند و مجموع آن‌ها هم که صفر است.